

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES FONDATIONS DE RÉVOLUTION DANS L'HYPOTHÈSE DE LA PLASTICITÉ PARFAITE

M. ROBERT NEGRE et PIERRE STUTZ

Laboratoire de Mécanique des Fluides Faculté des Sciences, Grenoble, France

Résumé—Cet article traite de l'écoulement initial sous une fondation de révolution (solutions statiques et cinématiques associées) et donne les coefficients de force portante limite.

La loi rhéologique adoptée est constituée du critère de Coulomb généralisé et d'une loi d'écoulement type potentiel, physiquement plausible, vérifiant la condition d'incompressibilité à l'état plastique, condition incompatible avec l'existence du potentiel plastique classique.

I. INTRODUCTION

NOUS nous proposons d'étudier l'écoulement d'un matériau à dilatation non standardisée, en particulier un matériau incompressible, sous une fondation de révolution et de déterminer sa force portante limite. (solutions statiques et cinématiques associées).

La détermination de la force portante d'une fondation est un des problèmes les plus importants que la Mécanique des Sols doit résoudre. C'est un problème de charge limite qui peut être abordé à partir du schéma du corps rigide-plastique.

En plasticité parfaite, le poinçonnement d'un sol par une fondation cylindrique de révolution a été abordé en 1938 par Bonneau [3]; il donne les équations statiques de l'équilibre limite en admettant la validité de l'hypothèse de Haar-Karman. Partant de la même hypothèse, Berezancev [1] donne en 1948 les solutions statiques à différents problèmes de symétrie axiale. En 1955, Shield [10] analyse les différents régimes plastiques possibles pour un matériau de Tresca ayant comme loi d'écoulement celle du potentiel. Cox, Eason et Hopkins [4] généralisent ces travaux au matériau de Coulomb.

Tous les problèmes traités ne concernent cependant que le cas d'une fondation parfaitement lisse, la loi d'écoulement étant dans tous les cas celle du potentiel plastique. A notre connaissance, le cas d'une fondation rugueuse avec une loi d'écoulement plus générale n'a pas été abordé. Aussi dans cette étude, tout en adoptant comme critère d'écoulement la loi de Coulomb généralisée, nous lui associerons une loi d'écoulement physiquement plus plausible : celle proposée par D. Radenkovic [8] dans sa définition du matériau "non standard"; elle nous semble mieux décrire le comportement des sols qui vérifient plutôt la condition d'incompressibilité à l'état plastique, que la dilatation prévue par la théorie du potentiel plastique classique. Nous verrons d'autre part que l'inclinaison des contraintes sous la fondation n'est pas fixée a priori, mais est obtenue comme résultat des calculs.

II. LOI DE COMPORTEMENT

Dans la suite, nous admettons donc que le corps est rigide-plastique, et qu'il obéit au critère d'écoulement de Coulomb généralisé qui se note :

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \quad (i, j, 1, 2, 3) \quad (1)$$

où :

ϕ est l'angle de frottement du matériau
 C sa cohésion
 σ_i ($i, 1, 2, 3$) les contraintes principales.

Dans l'espace des contraintes principales σ_i , la relation (1) représente une pyramide dont la section par le plan déviatoire est un hexagone irrégulier (cf. Fig. 1).

La loi d'écoulement est par hypothèse, à potentiel :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\lambda \partial G(\sigma_{ij}, \phi^*)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

où :

$\dot{\epsilon}_{ij}$ désigne les composantes du tenseur vitesse de déformation,
 λ un scalaire dépendant de l'état de contrainte.
on note $G(\sigma_{ij}, \phi^*)$ la fonction potentiel :

$$G(\sigma_{ij}, \phi^*) = \sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \phi^* - 2c \cos \phi^* \quad \text{avec : } 0 \leq \phi^* \leq \phi. \quad (3)$$

Ainsi l'équation $G(\sigma_{ij}, \phi^*) = 0$ représente encore, dans l'espace des contraintes, une pyramide irrégulière intérieure à celle définie par (1).

— Si $\phi^* = \phi$, $G(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$, on retrouve la loi du potentiel plastique classique ("matériau standard").

— Le cas $\phi^* = 0$, caractérise un écoulement à volume constant ("matériau non standard incompressible"). La variation relative de volume est $\lambda \sin \phi^*$, proportionnelle à $\sin \phi^*$.

L'introduction d'une nouvelle constante d'écoulement ϕ^* , à déterminer expérimentalement, permet donc de décrire le comportement de corps très variés au moyen d'un formalisme unique, et étend la gamme des lois plausibles pour les écoulements à potentiel ; on conserve ainsi l'hypothèse du potentiel, si commode au point de vue analytique et on se rapproche de la réalité physique en choisissant ϕ^* de manière adéquate.

Enfin, en prenant $\phi^* = 0$, on traite le cas de l'incompressibilité, souvent conforme à l'expérience pour le matériau de Coulomb.

Puissance dissipée

La puissance dissipée (par unité de volume) à l'instant initial, a pour expression :

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (\text{on adopte la convention de l'indice muet}). \quad (4)$$

Pour un régime quelconque défini par $\sigma_i, \sigma_j, i > j$, sur la surface limite, elle vaut :

$$D = \lambda [(\sigma_i + \sigma_j)(\sin \phi - \sin \phi^*) + 2c \cos \phi]. \quad (5)$$

Par exemple, le calcul sur l'arrête A (cf. Fig. 1) donne :

$$D = \lambda [(\sigma_1 + \sigma_2)(\sin \phi - \sin \phi^*) + 2c \cos \phi]. \quad (6)$$

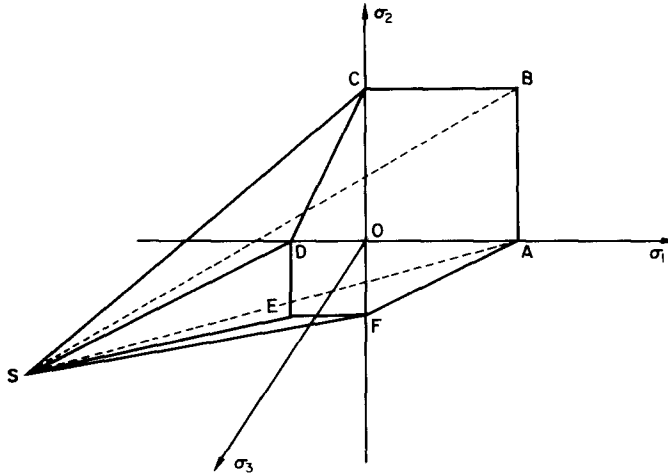


FIG. 1. Surface limite dans le cas du critère de Coulomb généralisé

$$\sigma_i - \sigma_j - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \Phi - 2c \cos \Phi = 0 \quad (i, j: 1, 2, 3)$$

ABCDEF intersection avec le plan $\sigma_3 = 0$

$$A[a_0; 0]; \quad B[a_0, a_0]; \quad C[0; a_0]; \quad D[-b_0, 0];$$

$$E[-b_0 - b_0]; \quad F[0; -b_0];$$

$$a_0 = 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}; \quad b_0 = 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}.$$

Les contraintes de compression sont prises positives.

La relation $0 \leq \phi^* \leq \phi$ entraîne que D et λ sont de même signe. La formule se réduit à :

$$D = 2c\lambda \cos \phi \text{ pour un matériau standard } (\phi^* = \phi, \text{ potentiel classique})$$

$$D = \lambda(\sigma_i - \sigma_j) \text{ pour un matériau incompressible } (\phi^* = 0).$$

Eu égard aux conventions adoptées, la dissipation est astreinte à vérifier $D \geq 0$; or, d'après ce qui précède, D et λ sont de même signe, d'où le critère $\lambda \geq 0$. On devra donc s'assurer, à posteriori, que l'inégalité précédente est satisfaite; c'est une condition nécessaire de la validité physique de la solution. Dans le cas de révolution, la vérification du critère $\lambda \geq 0$ revient à étudier le signe de la composante radiale de la vitesse. Le critère de validité a toujours été vérifié.

Choix du régime plastique

Les régimes plastiques dépendent de la position du point représentatif sur la surface limite.

L'étude détaillée des différents régimes a été faite par Cox, Eason et Hopkins (cf. [4]) dans le cas du potentiel plastique classique. Nous avons étendu ces résultats au cas du matériau non standard.

Le choix du régime est fait en fonction des problèmes à résoudre. Nous posons, par convention $\sigma_\theta = \sigma_3, \sigma_1 > \sigma_2$; d'autre part, dans les applications abordées dans ce mémoire,

la contrainte principale majeure est située dans le plan méridien. Nous devons donc nous limiter aux régimes pour lesquels :

$$\sigma_1 > \sigma_2; \quad \sigma_1 \geq \sigma_3$$

Nous éliminons les groupes 1 (*B* et *E*) et 4 (*AF*), qui n'admettent que des solutions triviales correspondant à des conditions particulières qui ne sont pas remplies dans les cas que nous traitons (par exemple, pour le régime *AF* $\dot{\epsilon}_\theta = 0$ soit vitesse radiale nulle, condition incompatible avec les problèmes étudiés ci-après).

Le groupe 2 (*AB* et *EF*) conduit à des équations du type hyperbolique, mais une solution cinématique doit-être obtenue pour pouvoir déterminer le champ statique. Par ailleurs, σ_θ n'est pas la contrainte principale intermédiaire.

Pour les problèmes que nous envisageons, les calculs dans le domaine élastique (cf. Rouget [9]) ont montré que σ_θ est la contrainte principale intermédiaire. Si on admet une certaine continuité dans le passage des domaines élastique et plastique, on est amené à écarter le groupe 2.

Il nous reste donc les régimes d'arêtes *A* et *F* (groupe 3) dits régimes de Haar-Karman, que nous examinons en détail :

régime A :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \\ \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_\theta \end{array} \right. \\ \text{(b)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \lambda(1 - \sin \phi^*) \\ \dot{\epsilon}_2 = -\lambda\mu(\lambda + \sin \phi^*) \\ \dot{\epsilon}_3 = -\lambda(1 - \mu)(1 + \sin \phi^*) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 < \mu < 1$$

$$\begin{aligned} \mu = 0 & \text{ correspondant au plan } AB \\ \mu = 1 & \text{ correspondant au plan } AF. \end{aligned}$$

λ étant > 0 , $\dot{\epsilon}_\theta < 0$, la déformation a lieu dans le sens des $r > 0$, ce qui correspond à l'état de butée par rapport à la paroi de la fondation (cf. Fig. 3).

régime F :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0 \\ \sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_2 \end{array} \right. \\ \text{(b)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_1 = \lambda\mu(1 - \sin \phi^*) \\ \dot{\epsilon}_2 = -\lambda(1 + \sin \phi^*) \\ \dot{\epsilon}_3 = \lambda(1 - \mu)(1 - \sin \phi^*) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8)$$

$$0 < \mu < 1$$

$$\begin{aligned} \mu = 0 & \text{ correspondant au plan } EA \\ \mu = 1 & \text{ correspondant au plan } AF \end{aligned}$$

la déformation a lieu dans le sens des $r < 0$ ($\dot{\epsilon}_\theta > 0$), c'est-à-dire vers l'axe de révolution, ce qui correspond à l'état de poussée par rapport à la paroi de la fondation (cf. Fig. 3).

Nous pouvons poser :

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{1}{2}[\sigma_1 + \sigma_2 - X_D(\sigma_1 - \sigma_2)] \\ X_D &= +1 \text{ caractérisant le régime } A \\ X_D &= -1 \text{ caractérisant le régime } F.\end{aligned}\quad (9)$$

III. EQUATIONS DE BASE

Pour le régime plastique que nous avons retenu, une solution statique du problème du poinçon peut être obtenue séparément de la solution cinématique. En introduisant les relations (7a) dans les équations de l'équilibre indéfini nous obtenons le système qui régit le champ statique :

$$\frac{\partial \left\{ \begin{array}{l} \zeta \\ \eta \end{array} \right\}}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi \pm \mu) \frac{\partial \left\{ \begin{array}{l} \zeta \\ \eta \end{array} \right\}}{\partial y} = \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} \quad (10)$$

où

$$\begin{aligned}\left. \begin{array}{l} \zeta \\ \eta \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} \cotg \phi \log \sigma \pm \varphi \\ \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} &= \mp \frac{U \sin(\varphi \mp \mu) - V \cos(\varphi \mp \mu)}{2\sigma \sin \phi \cos(\varphi \pm \mu)} \pm X_R \frac{\cos(\varphi \pm \mu) - X_D \cos(\varphi \mp \mu)}{2(y+R) \cos(\varphi \pm \mu)}\end{aligned}\quad (11)$$

φ est l'angle de la contrainte principale σ_1 avec Ox .

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + 2H) \quad H = C \cotg \phi$$

U et V les composantes des forces de volume selon Ox et Oy .

($U = \gamma$ $V = 0$ dans nos applications, γ étant le poids volumique du matériau)

$X_R = 1$: problème de révolution ; $X_R = 0$: problème plan ;

R le rayon de la fondation. Tous les angles sont orientés, le sens positif est celui de la trigonométrie.

Les équations du champ cinématique sont obtenues en éliminant les paramètres λ et μ des équations (7b), et en écrivant que les tenseurs contrainte et vitesse de déformation ont même axes principaux :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos 2\varphi + \sin \phi^*) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\cos 2\varphi - \sin \phi^*) \frac{\partial v_y}{\partial y} = -X_R(1 - X_D \sin \phi^*) \cos 2\varphi \frac{v_y}{y+R} \\ \sin 2\varphi \frac{\partial v_x}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial v_x}{\partial y} - \cos 2\varphi \frac{\partial v_y}{\partial x} - \sin 2\varphi \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

v_x and v_y étant composantes du vecteur vitesse.

$\dot{\varepsilon}_{ij} = -\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$, le signe-provenant des conventions adoptées (contraintes positives en compression) et du choix des axes de référence ($i, j: x, y$).

Rappelons que les systèmes (10) et (12), quasi-linéaires, sont du type hyperbolique; ils admettent donc chacun 2 familles de multiplicités bicaractéristiques† définies par les équations suivantes :

Multiplicités statiques

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array} \left| \begin{array}{l} dy = \operatorname{tg}(\varphi \pm \mu) dx \\ d \left\{ \begin{array}{l} \xi \\ \eta \end{array} \right. = \left. \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right\} dx. \end{array} \right. \quad (13)$$

Multiplicités cinématiques

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \\ \text{(b)} \end{array} \left| \begin{array}{l} dy = \operatorname{tg}(\varphi \pm \mu^*) dx \\ dv_x + \operatorname{tg}(\varphi \pm \mu^*) dv_y = \frac{-(1 - X_D \sin \phi^*) v_y}{2(y + R) \cos^2(\varphi \pm \mu^*)} dx. \end{array} \right. \quad (14)$$

où

$$\mu^* = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi^*}{2}.$$

Les bicaractéristiques cinématiques sont inclinées de $(\phi - \phi^*)/2$ par rapport aux bicaractéristiques statiques, et font entre elles l'angle $2\mu^* = \pi/2 - \phi^*$ (cf. Fig. 2).

Dans le cas d'un matériau standard les deux réseaux coïncident.

Dans le cas d'un matériau non standard incompressible les bicaractéristiques cinématiques sont inclinées de $\phi/2$ par rapport aux bicaractéristiques statiques et forment un réseau orthogonal.

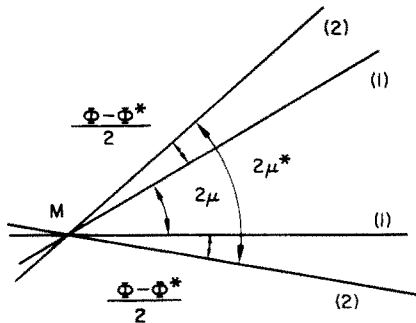


FIG. 2. (1) bicaractéristiques statiques. (2) bicaractéristiques cinématiques.

† Variables et signes supérieurs sont relatifs à la 1ère famille.

Remarque. Multiplicités bicaractéristiques au voisinage de l'axe. Sur l'axe de révolution, nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} y + R = 0 \\ \varphi = 0 \\ v_y = 0 \end{array} \right. \quad (15)$$

Les membres de droite des équations (13b) et (14b) prennent la forme indéterminée 0/0. Cette indétermination peut être levée en admettant que l'axe n'est pas une ligne singulière pour la solution. Les relations (13b) et (14b) seront remplacées par :

$$d\sigma + 2\sigma \operatorname{tg} \phi (1 + X_R) d\varphi = \mp \frac{U \sin(\varphi \pm \mu) - V \cos(\varphi \mp \mu)}{\cos \phi \cos(\varphi \pm \mu)} dx \quad (13b')$$

$$dv_x \pm \operatorname{tg} \mu^* (1 + X_R) dv_y = 0. \quad (14b')$$

Il s'agit de trouver une solution (généralement numérique) des systèmes (10) et (12) avec des conditions aux frontières données qui seront explicitées un peu plus loin.

On résout en premier lieu le système (10) puis le système (12) où φ est alors connu.

IV. CONDITIONS AUX LIMITES

Champ statique (pour les notations cf. Fig. 3a).

Sur la frontière OA , agit une surcharge normale et uniforme P , qui peut être prise égale à γD (D désigne l'enfoncement de la fondation et γ le poids volumique du matériau).

Sous la base OB , l'inclinaison des contraintes δ_{OB} et la fonction φ_{OB} sont liées par la relation :

$$\varphi_{OB} = \lambda + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \delta_{OB} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \delta_{OB}}{\sin \phi}. \quad (16)$$

Sur l'axe nous avons les relations (15).

Soit δ_F l'angle de frottement sol-fondation, qui est une donnée. Une solution admissible consisterait à se donner $\delta = -\delta_F$ sur la totalité de OB . δ ayant une valeur imposée en B correspondant à $\varphi_B = 0$, le point B serait singulier pour le tenseur contrainte.

Nous préférons une solution donnant une variation de l'inclinaison des contraintes d'un point à l'autre de la base du poinçon. Nous généraliserons la solution adoptée par Stutz [12] pour le problème plan.

Schéma a (cf. Fig. 3a). Nous considérons la première bicaractéristique OD' du saut de Prandtl, issue de O , qui rencontre l'axe sous l'angle $\mu = \pi/4 - \phi/2$, c'est-à-dire qui est compatible avec la condition $\varphi = 0$ sur l'axe.

A l'origine O , dans le saut complet de Prandtl, φ varie de φ_{O_1} correspondant à la donnée de φ sur OA , à φ_{O_2} correspondant à $\delta = -\delta_F$.

A la caractéristique OD' correspond un certain φ donc un certain δ que l'on appellera δ .

Dans ce cas, la répartition de δ sur OB est donnée par le calcul de δ en O à δ_B en B . On a la même solution statique pour $\delta_F \geq |\delta|$.

Schéma b (cf. Fig. 3b). Il n'y a pas de bicaractéristique issue de O du saut de Prandtl qui rencontre l'axe sous l'angle μ . Nous considérons alors la première bicaractéristique EF de la 3e zone qui le coupe sous cet angle.

Dans ce cas nous aurons :

- de O à E $\delta = -\delta_F$
- de E à B répartition de δ donnée par le calcul:
- de $\delta = -\delta_F$ en E à δ_B en B.

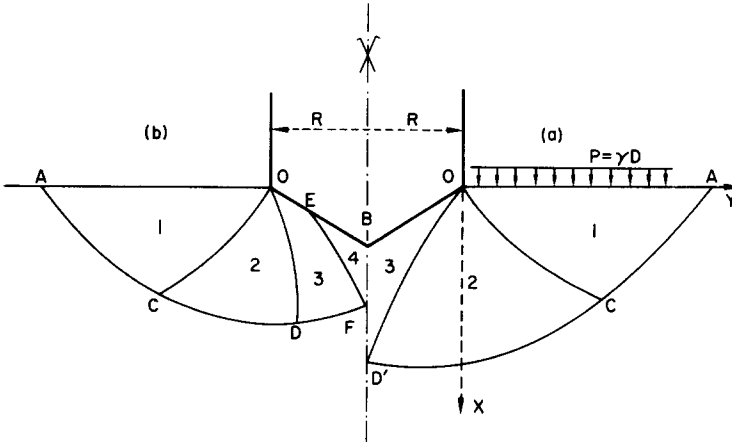


FIG. 3. Schemas résolutifs.

Champ cinématique

En ce qui concerne le cas du schéma (a) où le frottement maximum n'est pas mobilisé sous la fondation, on ne peut pas admettre de vitesse tangentielle pour le sol, les conditions cinématiques imposées par l'enfoncement du poinçon sont donc sur OB :

$$v_x = V_0; \quad v_y = 0. \tag{17}$$

V_0 étant la vitesse d'enfoncement de la fondation. Il en résulte que le coin OBD' se comporte comme un bloc rigide solidaire de la fondation (la solution $v_x = V_0$ et $v_y = 0$ satisfait les équations (12) et les conditions aux limites dans le coin $OD'B$). La ligne $D'CA$ séparant la zone en écoulement plastique et la zone restant rigide peut être considérée comme une ligne de discontinuité en vitesse ou une ligne de vitesse nulle.

Dans le premier cas la composante V_2 de la vitesse selon la caractéristique $D'C$ est nulle et la composante V_1 selon l'autre famille satisfait la relation :

$$\cos \phi^* dV_1 - \sin \phi^* V_1 d\phi = -X_R \frac{(1 - X_D \sin \phi^*) V_1 \cos(\phi - \mu^*)}{2(y + R) \cos(\phi + \mu^*)} dx \tag{18}$$

Il en résulte que :

$$\int_{V_{D'}}^{V_A} \frac{dV_1}{V_1} = \operatorname{tg} \phi^* \int_{\phi_{D'}}^{\phi_A} d\phi - X_R \frac{1 - X_D \sin \phi^*}{2 \cos \phi^*} \int_{y_{D'}}^{y_A} \frac{\cos(\phi - \mu^*)}{(y + R) \sin(\phi + \mu^*)} dy. \tag{19}$$

Quand $y + R = 0$, la troisième intégrale de (19) est divergente, ce qui conduit à une vitesse infinie en D' . La première hypothèse ne peut être retenue. $D'CA$ doit être considérée comme une ligne de vitesse nulle. Le point D' sera un point singulier en vitesse. La solution dans la zone $OD'CAO$ sera obtenue avec les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} v_x = V_0 \\ v_y = 0 \end{array} \right\} \text{ sur } OD' \text{ et } \left. \begin{array}{l} v_x = 0 \\ v_y = 0. \end{array} \right\} \text{ sur } D'CA$$

Dans le cas où la solution statique est celle de Fig. 4b, nous pouvons admettre un glissement du sol seulement sur la partie OE de la fondation. Il en résulte que la zone BEF sera rigide solidaire de la fondation.

FDA sera également une ligne de vitesse nulle. Le champ des vitesses dans la zone $EFDAC$ sera obtenu par la résolution des problèmes de Cauchy du type II et III avec les conditions $v_x = V_0, v_y = 0$, sur EF , $v_x = v_y = 0$ sur FDA et $v_x = V_0$ sur OE .

Domaine de validité de la solution

Pour le matériau non standard, l'inclinaison des contraintes en O doit vérifier :

$$0 \leq \delta \leq \delta^*$$

δ^* correspondant au cas où la bicaractéristique cinématique deuxième famille, limite du saut de Prandtl, est tangente à OB . δ^* est solution de l'équation :

$$\delta^* + \arcsin \frac{\sin \delta^*}{\sin \phi} + \phi^* + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dans le cas du potentiel plastique classique ($\phi^* = \phi$):

$$\delta^* = -\phi.$$

Remarque

Comme il existe un δ^* , valeur limite cinématiquement possible, par la suite, nous n'envisagerons que le domaine :

$$0 \leq \delta_F \leq |\delta^*|.$$

Il est probable que pour le domaine $|\delta^*| < \delta_F \leq \phi$ la solution provienne d'un schéma résolutif nouveau; cependant, les théorèmes limites de Radenkovic [8] permettent d'en déterminer les bornes inférieure et supérieure.

En général, pour les problèmes courants de Mécanique des Sols, la valeur δ^* est suffisamment voisine de ϕ pour que la solution calculée avec δ^* donne une bonne approximation, pour le domaine $|\delta^*| < \delta_F \leq \phi$.

V. INTEGRATION NUMERIQUE

Sauf cas très particuliers, les problèmes étudiés ci-après ne peuvent être traités que numériquement.

Nous avons employé le schéma aux différences finies classique de la méthode des caractéristiques.

Rappelons que le traitement numérique des équations non linéaires aux dérivées partielles exige quelques précautions. Il n'existe pas de critère rigoureux de convergence et

de stabilité des méthodes numériques pour ces problèmes lorsque leurs solutions comportent des singularités.

C'est pourquoi, pour les calculs que nous présentons, nous avons testé la convergence et la stabilité du calcul par les deux seules méthodes qui sont actuellement à notre disposition :

- en faisant varier les paramètres d'intégration, et en comparant nos solutions avec des solutions explicites connues, voisines des solutions cherchées :
- en contrôlant la coïncidence de la solution au voisinage de la singularité avec celle explicite donnée par Kravtchenko et Sibille [6, 11].

VI. APPLICATIONS

Nous donnons ci-après quelques champs statiques et cinématiques pour les matériaux standard et non standard incompressibles. Nous avons en particulier étudié dans le cas $\lambda = -\pi/2$:

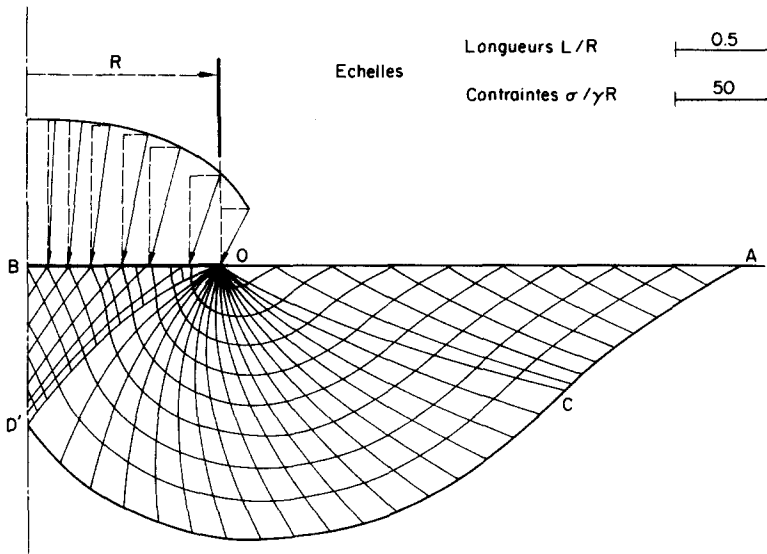


FIG. 4. Réseau de bicaractéristiques et répartition de contraintes sous la fondation dans le cas : $\lambda = -\pi/2$; $\Phi = 30$; $c = 0$; $P/\gamma R = 1$, $\delta_F = \Phi$ (schéma a).

— la variation de la forme du coin rigide qui se forme sous la base. Nous constatons en particulier que le coin augmente avec la profondeur D pour un angle de frottement donné.

— la répartition des contraintes sous la base de la fondation. Nous constatons que leur inclinaison diminue du bord vers le centre. L'inclinaison des contraintes est d'autant plus faible que la profondeur D est grande. On constate d'autre part que les contraintes tangentielles varient linéairement en fonction de la distance à l'axe, sauf au voisinage du bord de la fondation. La force portante limite de la fondation varie linéairement en fonction de la profondeur, excepté pour de faibles enfoncements où la courbe $(Q+H)/\gamma R = f[(P+H)/\gamma R]$ est fonction de la loi de comportement adoptée.

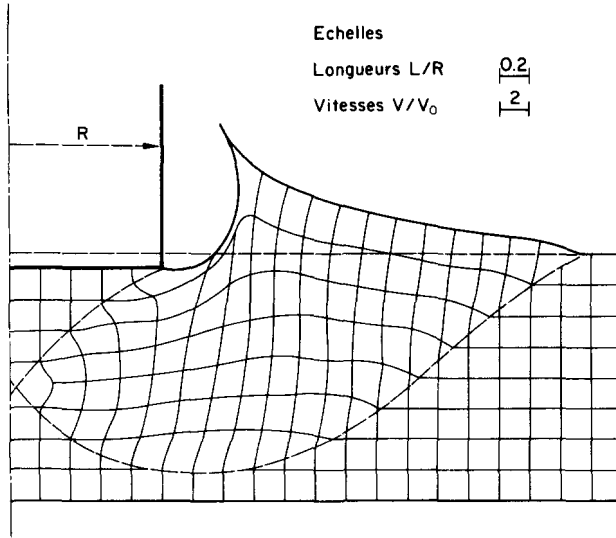


FIG. 5. Déformation d'un quadrillage: schéma a: matériau standard ($\lambda = -\pi/2$; $\phi = 30^\circ$; $(P+H)/\gamma R = 1$; $\delta_F = \phi$).

En effet, comme le montre la Fig. 11, les solutions statiques sont différentes pour un matériau standard et un matériau incompressible. On remarquera que la solution statique obtenue avec $\delta = -\phi$, solution qui n'est pas cinématiquement possible pour le matériau incompressible, constitue une borne supérieure pour la solution statique relative à ce matériau dans le domaine $|\delta^*| < \delta_F \leq \phi$ (cf. Théorèmes limites de Radenkovic [8]).

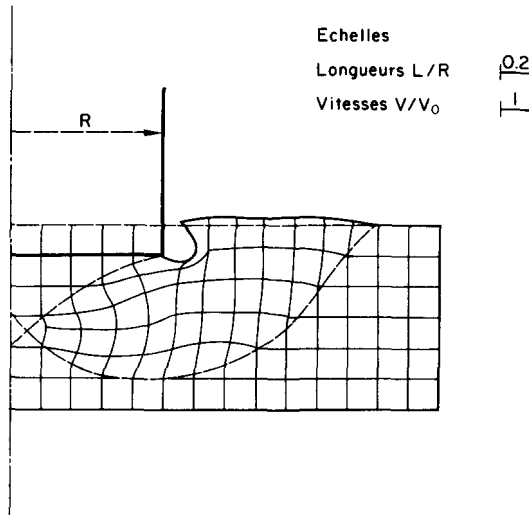


FIG. 6. Déformation d'un quadrillage. Schéma a—matériau incompressible. ($\lambda = -\pi/2$; $\phi = 30^\circ$; $(P+H)/\gamma R = 1$; $\delta_F = 0.8\phi$).

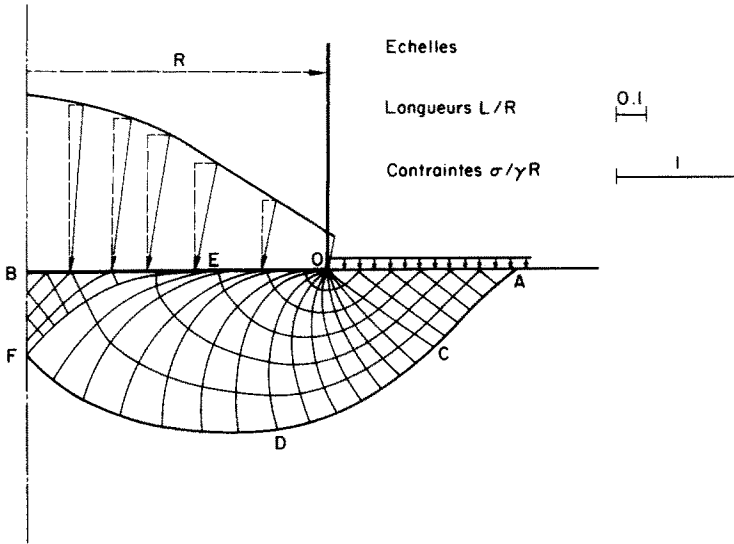


FIG. 7. Réseau de bicaractéristiques et répartition des contraintes sous la fondation dans le cas $\lambda = \pi/2, \Phi = 10^\circ; c = 0, P/\gamma R = 1, \delta_F = \Phi$ (schéma b).

On peut alors exprimer la capacité portante limite unitaire Q par la relation :

$$Q = \gamma R N_{\gamma R} + \gamma D N_{qR} + c N_{cR}$$

où $N_{\gamma R}, N_{qR}, N_{cR}$ sont des coefficients fonction de l'angle de frottement seul

$$(N_{cR} = \cotg \phi [N_{qR} - 1]).$$

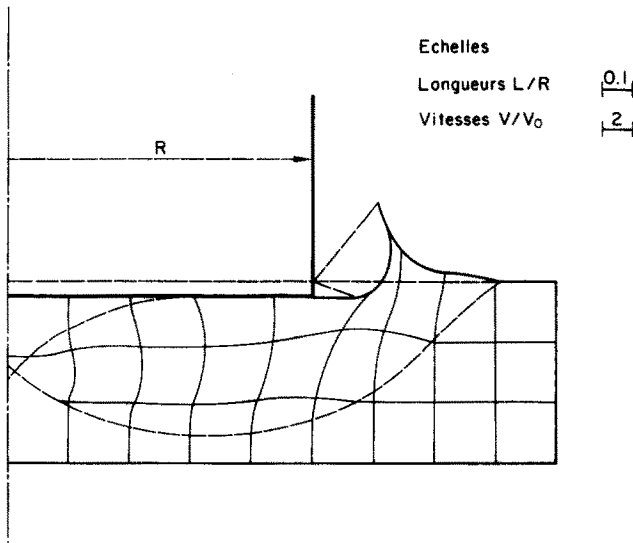


FIG. 8. Déformation d'un quadrillage schéma b. Matériau standard. ($\lambda = -\pi/2; \phi = 10^\circ; P + H/\gamma R = 1; \delta_F = \Phi$).

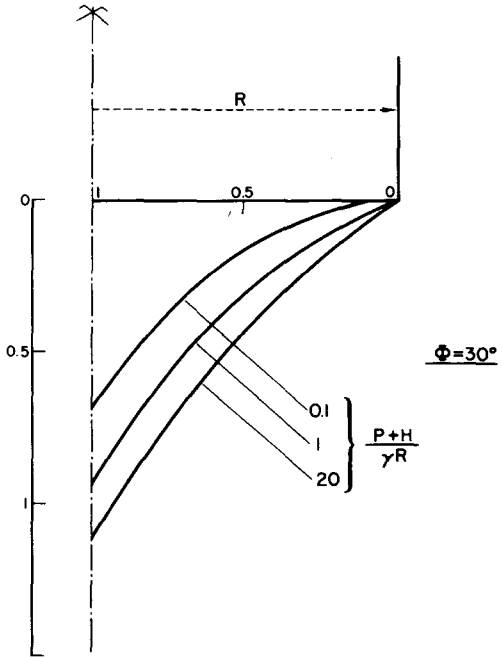


FIG. 9. Variation du coin sous la fondation en fonction de la profondeur pour un Φ donné. ($\lambda = -\pi/2$; $\Phi = 30$; $\delta_F = \Phi$).

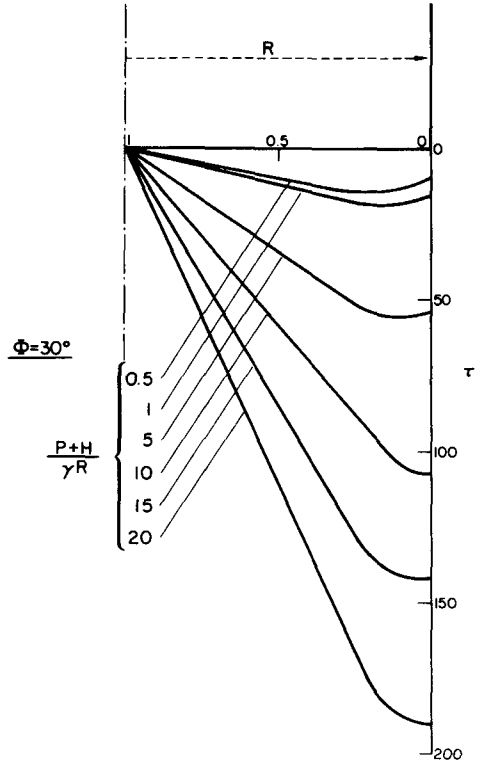


FIG. 10. Variation des contraintes tangentielles sous la fondation en fonction de la profondeur pour un Φ donné. ($\lambda = -\pi/2$; $\Phi = 30$; $\delta_F = \Phi$).

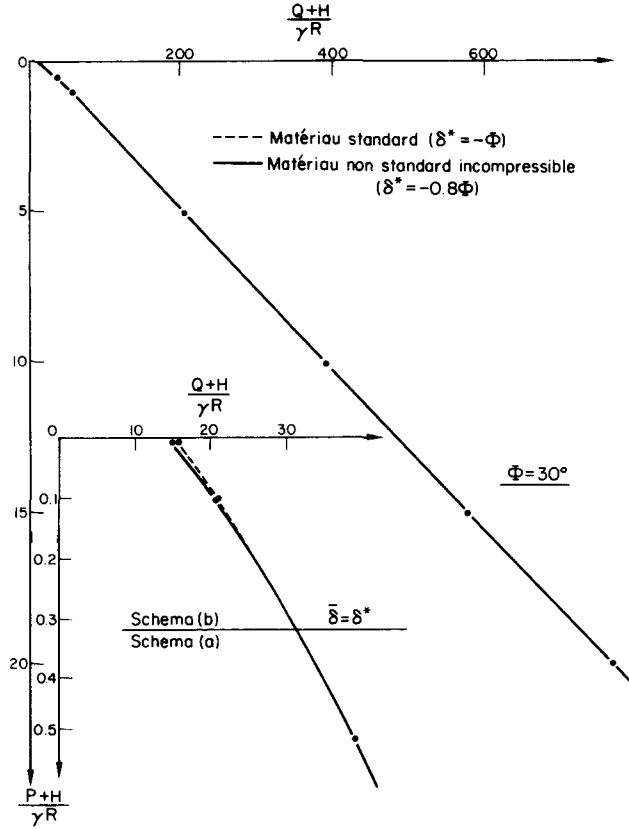


FIG. 11. Force portante limite en fonction de la profondeur ($\lambda = -\pi/2$; $\Phi = 30^\circ$; $\delta_F = |\delta^*|$).

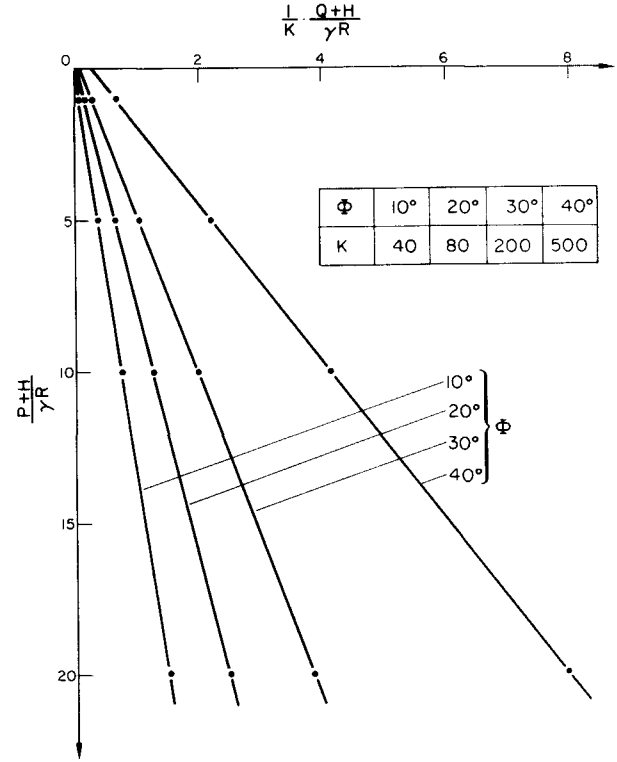


FIG. 12. Force portante limite en fonction de la profondeur pour différentes valeurs de Φ ($\lambda = -\pi/2$; $\delta_F = \Phi$).

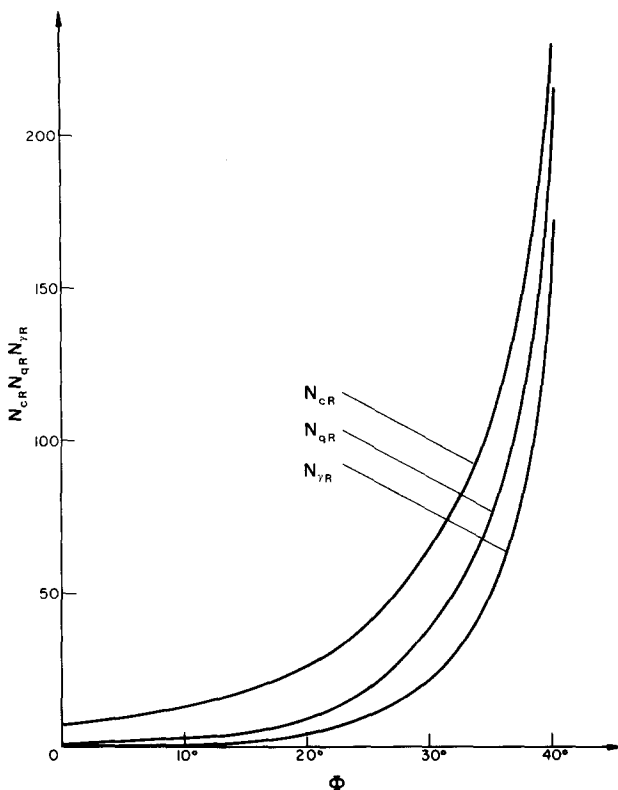


FIG. 13. Coefficients de capacité portante limite ($\lambda = -\pi/2$; $\delta_F = \Phi$).

Les valeurs de ces coefficients sont en accord avec les formules semi-empiriques de Terzaghi [13] et les courbes expérimentales données par Fedá [5]. Ils confirment les résultats donnés en [2] obtenus par un schéma de calcul différent.

REFERENCES

- [1] B. G. BEREZANCEV, *Problème de l'Equilibre Limite d'un Milieu Pulvérulent en Symétrie Axiale* (en russe). Edition d'Etat de la Littérature Technique Théorique, Moscou (1952).
- [2] J. BIAREZ, R. NEGRE, LE GALL, et P. STUTZ, Calcul de l'équilibre limite des fondations peu profondes de révolution. *C.R.A.S.* **265**, 579 (1967).
- [3] H. BONNEAU, Etude de la fondation rectiligne et de la fondation circulaire. *Ann. Ponts Chaussées* **19**, 497 (1938).
- [4] A. D. COX, EASON and HOPKINS, Axial symmetric plastic deformation in soils, *Phil. Trans. R. Soc.* **A254**, (1036) (1961).
- [5] J. FEDÁ, Research on the bearing capacity of loose soils, *Congr. de Mécanique des Sols* **1**, Paris (1961).
- [6] J. KRAVTCHENKO, et R. SIBILLE, Etude des singularités rencontrées dans les problèmes d'équilibre limite. *C.R.A.S.* **157**, 3750 (1967).
- [7] R. NEGRE, Problèmes de révolution en plasticité parfaite Remarques sur le calcul de la solution sur l'axe. *C.R.A.S.* **261**, 3735 (1965).
- [8] D. RADENKOVIC, Théorie des charges limites, extension à la Mécanique des Sols, ed par. J. MANDEL. *Sommaire de Plasticité*, Ecole Polytechnique, Paris (1961).
- [9] ROUGET, Intégration numérique des champs de contraintes et de déformations élastiques par le méthode de la double-grille, Thèse de 3ème Cycle. Grenoble (1967).

- [10] R. T. SHIELD, On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry. *Proc. R. Soc. A* **233**, 267 (1955).
- [11] R. STIBILLE, Méthodes de calcul approché du champ des contraintes plan ou de révolution dans les sols à l'état d'équilibre limite. Thèse de Doctorat ès-sciences, Grenoble (1967).
- [12] P. STUTZ, Contribution à l'étude de la loi de déformation plastique des sols. Thèse de 3e Cycle, Grenoble (1963).
- [13] K. TERZAGHI et R. B. PECK, *Mécanique des Sols Appliquée*, Ed. Dunod, (1961).
- [14] J. TURPIN, Contribution à l'étude de la répartition des contraintes sous une fondation plane rugueuse en milieu bi-dimensionnel pulvérulent. Thèse de 3e Cycle, Grenoble (1963).

(Received 20 February 1969; revised 13 May 1969)

Abstract—This paper deals with the initial flow under an axial symmetrical foundation (associated static and cinematic solutions) and gives the coefficients of the limit bearing capacity.

We have adopted, as a rheological law, the generalized Coulomb's criteria associated with a potential type flow equation of physical meaning. This type of law takes into account the condition of incompressibility in the plastic field; this condition is, among others, incompatible with the presence of a classical plastic type potential.

Абстракт—Работа решает вопрос начального осесимметрического течения/связанные статические и кинематические решения/и определяет коэффициенты несущей способности.

Принимается, в смысле реологического закона, обобщенные критерия, связанные с потенциальным типом уравнения течения физического смысла. Этот тип закона учитывает условие несжимаемости в пластическом поле. Условие является, между прочим, несовместимым при наличии потенциала пластического типа.